

철도차량의 동적 평형 위치 계산

Calculation of dynamic equilibrium configuration of railway vehicle

강주석*†

Juseok Kang*†

Abstract Dynamic stability of railway vehicle can be determined by eigenvalue analysis of linear dynamic equations. In order to use Lyapunov stability criteria which is based on the eigenvalue analysis of linear system, dynamic equilibrium configuration of the system needs to be calculated. In this analysis, a method to find dynamic equilibrium of multibody dynamic system is suggested. Dynamic equilibrium configuration represented by the independent coordinate system is obtained by using QR decomposition method. This approach is applied to stability analysis of the railway vehicle system.

Keywords : Railway vehicle, Dynamic equilibrium configuration, Eigenvalue analysis, QR decomposition method

초 록 철도차량의 안정성은 선형운동방정식의 고유치해석을 통해 판별될 수 있다. 선형운동방정식의 고유치해석에 기초한 안정성해석인 Lyapunov 방법을 적용하기 위해서는 먼저 동적 평형 위치를 구하여야 한다. 본 연구에서는 다물체 동역학 모델에 대한 동적평형 위치 해석 방법을 제안한다. QR 분해법을 이용하여 독립좌표계로 표현된 운동방정식으로부터 동적 평형 위치를 구한다. 이를 기초로 철도차량의 안정성해석 방법에 대해 다루고자 한다.

주요어 : 철도차량, 동적평형위치, 고유치해석, QR분해법

1. 서 론

철도차량의 직진주행 안정성은 차량의 선형동역학 식의 고유치를 판별함으로써 결정된다. 이러한 Lyapunov 안정성 판별법은 시스템의 동적 평형위치에서 정의되어야 한다[1,2]. 동적 평형 위치를 계산하는 것은 안정성 계산을 위해 필수적으로 거쳐야 하는 단계이다. 다물체계에서 정적 평형위치 계산 방법은 많은 연구가 제시되었고 상용 다물체 동역학 해석프로그램에도 제공이 되고 있다. 그러나 다물체계의 동적 평형위치 계산 방법에 대한 연구는 거의 제시되지 않았으며 최근 조인트 좌표계에 대한 해석방법이 제시되었다[3]. 다물체계의 동적 평형 위치는 대부분의 기존의 다물체 동역학 해석 프로그램에서도 제공되고 있지 않다.

본 연구에서는 직교 좌표계를 가진 6자유도계 일반 강제 좌표계로 유도되는 다물체 동역학 운동방정식으로부터 독립좌표계로 이루어진 동적 평형위치 식을 유도한다. QR 분해법을

*† 교신저자: 한국교통대학교 철도대학 철도차량시스템공학과(kjuseok@ut.ac.kr)

이용하여 구속조건식에서 독립좌표계를 얻을 수 있으며 이를 이용하여 수치해석을 수행한다. 본 연구의 동적 평형위치 계산방법을 철도 차량에 적용하여 직진주행과 곡선 주행에서 평형위치를 계산한다.

2. 동적 평형위치 계산

Lyapunov 방법에 의한 안정성 판별법은 평형위치에서 계산된 고유치를 계산함으로써 정해진다. 동적 시스템은 다음과 같이 1차 미분식으로 정의할 수 있다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{x}(t)$ 는 상태변수이다.

철도차량의 직진 안정성과 같은 경우, 임의의 속도 V 에 대해 다음과 같은 행렬 \mathbf{A} 를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{A} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \quad (2)$$

위의 식에서 \mathbf{x}_0 는 평형위치의 상태변수로서 $\mathbf{f}[\mathbf{x}_0]=0$ 를 만족하여야 한다.

구속된 다물체계에서는 식 (1)은 독립좌표계로 표현되어야 한다. 여기서는 QR 분해법을 이용하여 구속조건식으로부터 독립좌표계를 얻는 방법을 이용한다.

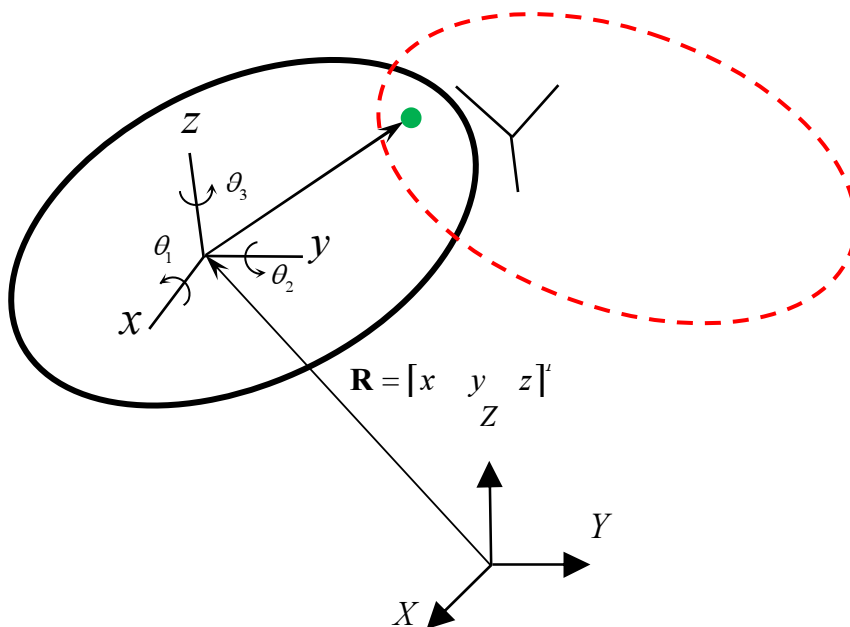


Fig. 1 Generalized coordinates in a body

Fig. 1과 같은 강체에서 구속된 다물체계는 임의의 위치에서 다음과 같은 구속조건식을 만족한다.

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (1)$$

여기서, t 는 시간이며 $\mathbf{q} = [x \ y \ z \ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$ 는 다물체계의 일반좌표이다.

위의 구속조건식을 포함하여 구속된 다물체계의 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_q^T \\ \mathbf{C}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}_d \end{bmatrix} \quad (2)$$

위의 구속조건식을 포함하여 구속된 다물체계의 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

식 (1)을 미분하고 QR 분해법을 적용하면 다음과 같이 속도관계식을 얻는다.

$$\dot{\mathbf{q}}(t_i) = \hat{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_t(\mathbf{q}, t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t_i) \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서 $\mathbf{C}_t(\mathbf{q}, t)$ 는 구속조건식에서 시간 t 에 대한 자코비언 함수이다. 동적 평형위치에서 $\dot{\mathbf{z}} = 0$ 이므로 $\dot{\mathbf{q}}(t_i) = -\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{C}_t(\mathbf{q}, t)$ 가 된다.

마찬가지로 QR 분해법을 적용하면, 가속도 관계식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}_1 & \hat{\mathbf{Q}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

위의 식에서 독립좌표계의 가속도가 0이 됨을 이용하여 동적 평형식을 구할 수 있다. 동적 평형위치에서는 구속조건을 만족해야 하므로 식 (1)과 동시에 만족하는 위치가 동적 평형위치가 된다.

3. 결론

본 연구에서는 다물체 동역학 모델에 대한 동적평형 위치 해석 방법을 제안하였다. 구속조건식과 운동방정식은 직교좌표계의 일반좌표계를 이용하였다. QR 분해법을 이용하여 독립좌표계로 표현된 운동방정식으로부터 동적 평형위치를 구하였다. 본 연구에서 제안한 동적 평형위치 계산 방법은 철도차량 뿐만 아니라 일반적인 다물체계의 동적 평형위치를 구할 수 있다.

후 기

이 논문은 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업 지원을 받아 수행된 것임(NRF-2010-0022205)

참고문헌

- [1] S.Y. Lee, Y.C. Cheng, (2005) Hunting Stability Analysis of High-Speed Railway Vehicle Trucks on Tangent Tracks *Journal of Sound and Vibration*, 282, pp. 881~898.
- [2] C Ebenbauer, F Allgower (2007) Stability analysis of constrained control systems:An alternative approach *Systems & Control Letters*, 56, pp. 93 - 98
- [3] B. S Kim, S. M Eom, H. H. Yoo, (2009) Design variable tolerance effects on the natural frequency variance of constrained multi-body systems in dynamic equilibrium *Journal of Sound and Vibration*, 320, pp. 545-558