

## 복층 탄성 보 구조물의 계면응력

### Interfacial stresses in a two-layer elastic beam structure

박일욱\*, 장인준\*, 이우식\*†

Ilwook Park\*, Injoon Jang\*, Usik Lee\*†

**Abstract** It is possible to repair or strengthen a beam structure by attaching a thin steel plate to the surface of it. This time, a beam becomes a two-layer structure, and the attached side is affected by normal stress and shearing stress. For a successful design of a two-layer beam structure, it is very important to predict normal stress and shearing stress which influence the contact surface of structure under various load conditions. In this study, the equation of motion which meets the equilibrium of force between each beam, was derived using Timoshenko's beam theory in each floor, and the final interfacial stress was calculated. Lastly, numerical examples were applied to investigate interfacial stress that affects the contact surface under various load conditions.

**Keywords** : Interfacial stresses, Two layer beam, Timoshenko beam

**초 록** 보 구조물의 표면에 얇은 강판을 부착하여 수리나 보강을 할 수 있다. 이때 보는 복층 구조물이 되며, 부착 면에는 수직 응력과 전단응력이 작용하게 된다. 복층 보 구조물의 성공적인 설계를 하기 위해, 다양한 하중 조건에 대한 구조물의 접촉면에 작용하는 수직응력과 전단응력의 예측은 매우 중요하게 다뤄진다. 본 연구는 각 층의 보에 Timoshenko 보 이론을 사용하고 각각의 보 사이에 작용하는 힘의 평형을 만족하는 운동방정식을 유도하고 최종적인 계면응력을 구하였다. 마지막으로 다양한 하중조건에 대해 접촉면에 작용하는 계면응력을 조사하기 위해 수치예제를 실시하였다.

**주요어** : 계면응력, 복층 탄성 보, 티모센코 보

## 1. 서론

많은 연구자들은 복층 보 구조물에 작용하는 계면응력을 구하기 위해 많은 연구를 하였다.[1-2] 본 논문은 계면응력을 구하기 위해 각 층을 티모센코 보 이론을 적용시키고 각 층 사이에 작용하는 힘 평형관계를 이용하여 힘, 모멘트 그리고 전단력을 미지수로 하는 운동방정식을 유도하였다. 수치예제를 통해 외력에 따른 계면응력 분포를 계산했다. 정밀도를 확인하기 Smith [2] 모델과 ANSYS 해석 결과를 비교하였다.

† 교신저자: 인하대학교 공과대학 기계공학과(ulee@inha.ac.kr)

\* 인하대학교 공과대학 기계공학과

## 2. 본 론

### 2.1 계면응력의 수학적 모델

#### 2.1.1 운동방정식

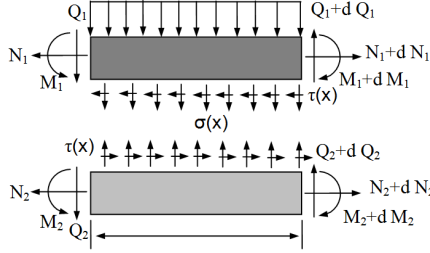


Fig. 1 Infinitesimal isolated body of the two layer beam

Fig. 1은 복층 보의 미소변위에 작용하는 힘을 나타낸 것이다. 각 층에 티모셴코 보 이론을 적용한 후 힘 평형 조건으로부터 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^6 N_1(x)}{dx^6} + c_1 \frac{d^4 N_1(x)}{dx^4} + c_2 \frac{d^2 N_1(x)}{dx^2} + c_3 N_1(x) + c_4 N_T + c_5 M_T = 0 \quad (1)$$

$$M_1(x) = \frac{a_1}{a_3} \frac{d^2 N_1(x)}{dx^2} - \frac{a_2}{a_3} N_1(x) + \frac{a_4}{a_3} N_T - \frac{a_5}{a_3} M_T \quad (2)$$

여기서

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{a_3}{a_1 b_1} \left( \frac{a_2 b_1}{a_3} + \frac{a_1 b_2}{a_3} + b_4 \right), & c_2 &= -\frac{a_3}{a_1 b_1} \left( \frac{a_1 b_3}{a_3} + b_5 - \frac{a_2 b_2}{a_3} \right), & c_3 &= -\frac{a_3}{a_1 b_1} \left( b_6 - \frac{a_2 b_3}{a_3} \right), & c_4 &= -\frac{a_3}{a_1 b_1} \frac{a_4 b_3}{a_3} \\ c_5 &= \frac{a_3}{a_1 b_1} \left( \frac{a_2 b_3}{a_3} + b_7 \right) M_T, & b_1 &= \frac{C_{m1}}{b} + \frac{C_{n2}}{b}, & b_2 &= \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}, & b_3 &= \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \\ b_4 &= \frac{h_2 C_{n2}}{2b} - \frac{h_1 C_{m1}}{2b}, & b_5 &= \frac{h_1}{2G_1} - \frac{h_2}{2G_2} + \frac{h_1 + h_2}{2G_2}, & b_6 &= \frac{h_1 + h_2}{2D_2}, & b_7 &= \frac{1}{D_2} \\ a_1 &= \frac{C_{s1}}{b} + \frac{C_{s2}}{b}, & a_2 &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{h_2(h_1 + h_2)}{4D_2}, & a_3 &= \frac{h_1}{2D_1} - \frac{h_2}{2D_2}, & a_4 &= \frac{1}{C_2}, & a_5 &= \frac{h_2}{2D_2} \end{aligned} \quad (3)$$

식 (1)로부터 특성 방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\lambda^6 + c_1 \lambda^4 + c_2 \lambda^2 + c_3 = 0 \quad (4)$$

복층 보 사이에 작용하는 힘과 모멘트는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^6 g_i e^{\lambda_i x} + N_{1p}(x), \quad M_1(x) = \sum_{i=1}^6 g_i m_i e^{\lambda_i x} + M_{1p}(x), \quad Q_1(x) = \sum_{i=1}^6 g_i q_i e^{\lambda_i x} + Q_{1p}(x) \quad (5)$$

여기서  $q_1$ 는 미지 상수이며 경계조건으로부터 계산 될 수 있다.  $N_{1p}$ 는 식 (1)의 특이해이며  $M_{1p}$ 와  $Q_{1p}$ 는 식(2)와 힘 평형 식으로부터 구할 수 있다. 또한 복층 보에 작용하는 수직응력과 전단응력은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tau(x) = \frac{1}{b} \frac{dN_1(x)}{dx}, \quad \sigma(x) = \frac{1}{b} \left( \frac{dQ_1(x)}{dx} - q \right) \quad (6)$$

### 2.1.2 수치예제

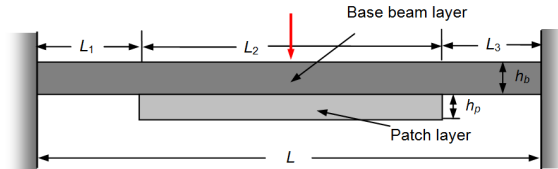


Fig. 2 Example problem of interfacial stresses

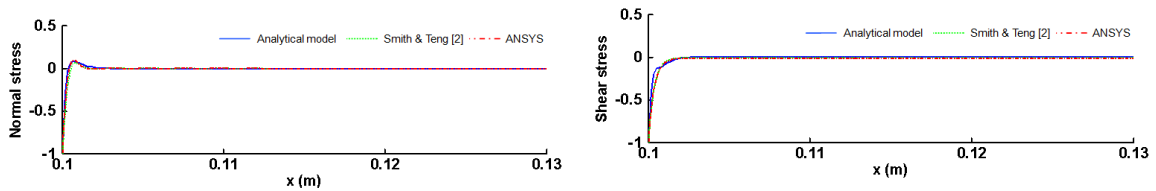


Fig. 3 Normalized normal and shear stresses

Fig. 2와 같이 양단이 고정되어 있는 복층보에 대하여 수치예제를 수행하였다. 여기서  $L_1 = L_2 = L_3 = 100 \text{ mm}$ ,  $h_b = 2 \text{ mm}$ ,  $h_p = 0.5 \text{ mm}$  이다. Fig. 3은 patch layer 왼쪽 모서리에 작용하는 수직응력과 전단응력을 나타낸 것이다. Smith & Teng [2]이 유도한 이론과 ANSYS 해석 결과를 비교했을 때 상당히 좋은 정밀도를 보여줬다.

## 3. 결론

본 연구는 복층 보 사이에 작용하는 계면응력을 구하였다. 1차 전단 변형이 고려된 티모센코 보 이론을 적용하므로써 기존 해석 모델보다 정확한 수직응력과 전단응력을 구할 수 있을 거라 기대된다.

## 후 기

이 논문은 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (과제번호: 2012R1A2A2A01004482)

## 참고문헌

- [1] P. Qiao, J. Wang (2004) Mechanics and fracture of crack tip deformable bi-material interface, *International Journal of Solids and Structures*, 41, pp. 7423-7444.
- [2] S. T. Smith, J. G. Teng (2001) Interfacial stresses in plated beams, *Engineering Structures*, 23, pp. 857-871.