

전차선 집중질량 모델과 분포질량 모델의 비교 해석

A Comparative Analysis between the Lumped Model and the Distributed Model of the Railway Catenary Systems

오성택*, 김백*†

SeongTaek Oh*, Baik Kim*†

Abstract When we simulate the railway catenary systems to find out the contact force between the trolley wire and the running pantograph or uplift displacement of the trolley wire, the lumped mass model is widely used for its convenience of applying the complicated elements of the catenary systems to the model. Decreasing the distance between the lumped masses tends to approach the distributed model but increases the dimension of the states equation, which results in escalated numerical error and extended calculating time. In this study, we have found the general solution of the distributed model by exploiting the Green's function and compared the results from the lumped model with altering the distance between masses to deduce the appropriate distance which maintains the excellency of calculating time and the accuracy.

Keywords : Lumped mass, Distributed mass, Catenary, Green's function

초 록 주행 중인차량의 팬터그래프와 전차선 사이의 접촉력 또는 전차선의 압상량을 구하기 위해 전차선을 모델링하는 경우에 일반적으로는 가선계의 복잡한 요소들을 모델에 반영시키기 쉬운 집중질량 모델을 사용하고 있다. 집중질량 모델의 경우에는 질량점 간의 간격을 축소시키는 경우 분포질량 모델에 근접하게 되나 상태방정식의 수가 증가하여 계산시간이 오래 소요되거나 수치적분과정에서의 오차가 증가하게 된다. 본 연구에서는 단순현으로 표현된 전차선 분포질량 모델의 일반해를 그린 함수를 사용하여 구하고 이를 질량점 간격을 변화시킨 집중질량 모델에서의 결과와 비교하여 계산 시간과 정확도에서 수월성을 유지할 수 있는 질량점 간격을 도출해 내고자 한다.

주요어 : 집중질량, 분포질량, 카테나리, 그린 함수

1. 서 론

전차선을 시뮬레이션하는 경우에 직면하게 되는 문제로는 전차선 모델 구성의 용이성과 이를 통한 해석 결과의 정확성 확보라는 두 가지를 들 수 있다. 이 두 문제는 서로 상반관계에 있어서, 해석 결과의 정확성은 전차선의 파동방정식으로부터 분석적 해를 구하는 것이 가장 정확하다고 할 수 있으나 반대로 모델 구성의 용이성 측면에서 살펴보면 전차선의 다양한 구성 요소들을 파동방정식에 반영시키기 어려우며 이에 따른 경계조건들로 인하여 분석적 해를 구하기 어렵게 된다. 이에 대한 대안으로 생각할 수 있는 것이 전차선을 단위 길

† 교신저자: 한국교통대학교 철도대학 철도전기전자공학과(whitek@ut.ac.kr)

* 한국교통대학교 대학원 철도전기전자공학과

이 당의 집중질량의 연결로 보고 각각의 집중질량에 가선 요소들을 결합시켜 전차선을 모델링하는 방법으로서 카테나리(Catenary) 구조의 전차선을 시뮬레이션하는 경우에는 실제적으로 유일한 방법이라고 할 수 있다. 그러나 집중질량 모델의 경우에는 집중질량 들 간의 간격을 줄이는 경우 분포질량 모델로부터 얻어지는 파동방정식에 근사적으로 접근하기는 하나 상태방정식(States equation)의 수가 증가하여 계산 시간이 급증할 뿐만 아니라 수치적분 과정에서의 오차도 증가하게 된다. 본 연구에서는 단순 현으로 간략화 된 전차선 분포질량 모델의 파동방정식으로부터 그린 함수(Green's function)를 사용하여 일반해를 구해내고, 이를 질량점 간격을 변화시킨 집중질량 모델에서의 결과와 비교를 통하여 계산 시간과 정확성에서 수월성을 유지할 수 있는 질량점 간격을 도출해 내고자 한다.

2. 분포질량 모델에 의한 해석

팬터그래프의 압상 또는 외부 요인에 의해 전차선에 여기 되는 파동은 전차선을 따라 이동하는 진행파가 된다. 진행파는 진행 방향과 동일한 방향의 변위를 갖는 종파(Longitudinal wave)와 직각 방향의 변위를 갖는 횡파(Transverse wave)가 있으나 전차선과 팬터그래프 사이의 관계를 살펴 보기 위해 여기서는 전차선을 단순 선(Single string)으로 보고 선에 유입된 진행파의 횡파 성분의 운동 만을 고려한 파동방정식은 다음과 같다.

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \quad (1)$$

이 방정식의 양변은 모두 N/m의 단위를 갖고 있으며 이때 전차선의 한 점에 집중된 압상력 P_0 [N]을 (1)식에 반영시키기 위해서는 단위 길이당의 힘으로 적용시켜야 하므로 거리에 대해 적분을 하였을 때 P_0 [N]이 나오는, 다음과 같이 단위 임펄스 함수(Unit impulse function) δ 를 사용하여 표현할 수 있다.

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + P_0 \delta(x - vt) \quad (2)$$

위의 비제차 파동방정식의 해법으로는 여러 가지 방법이 제안되고 있으나 여기서는 일본 전기철도핸드북[1]에 소개되고 있는 변위식과 같은 형태로 유도하기 위해 Green의 함수를 이용하는 방법을 택하기로 한다. (2)식을 다음과 같이 바꿔 쓰기로 한다.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \Phi(x, t), \quad \Phi(x, t) = \frac{P_0}{\rho} \delta(x - vt) \quad (3)$$

이 식의 $t = 0^-$ 에서의 초기 조건을 $y = f(x, 0^-)$, $\frac{\partial y}{\partial t} = g(x, 0^-)$ 라 하자. 즉, 초기 조건은 $t = 0^-$ 에서 전차선의 변위를 나타내는 식 $f(x, 0^-)$ 와 $t = 0^-$ 에서 전차선의 y축 방향(수직 방

향) 속도를 나타내는 식 $g(x, 0^-)$ 로 주어지게 된다. 이때 (3)식의 일반해는 다음과 같이 주어진다.

$$y(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^S f(\epsilon)G(x, \epsilon, t)d\epsilon + \int_0^S g(\epsilon)G(x, \epsilon, t)d\epsilon + \int_0^t \int_0^S \Phi(\epsilon, \tau)G(x, \epsilon, t - \tau)d\epsilon d\tau \quad (4)$$

여기서, $G(x, \epsilon, t)$ 는 소위 Green 함수[2]로 불리는 함수로 경계 조건이 $y(0, t) = 0$, $y(S, t) = 0$ 인 경우라면,

$$G(x, \epsilon, t) = \frac{2}{C\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{S}\right) \sin\left(\frac{n\pi \epsilon}{S}\right) \sin\left(\frac{n\pi Ct}{S}\right) \quad (5)$$

이 식에서 $t = 0^-$ 이전 시점에 전차선은 완전한 수평 상태를 유지하고 있고(즉, $f(x, 0^-) = 0$), 또한 전차선에 아무런 상하 진동도 없다면(즉, $g(x, 0^-) = 0$) (5)식은 우변의 세 번째 항의 계산만으로 간단히 귀결된다.

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \int_0^t \int_0^S \frac{P_0}{\rho} \delta(\epsilon - v\tau) \frac{2}{C\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{S}\right) \sin\left(\frac{n\pi \epsilon}{S}\right) \sin\left(\frac{n\pi C(t - \tau)}{S}\right) d\epsilon d\tau \quad (6) \\ &= \frac{2P_0}{C\pi\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{S}\right) \int_0^t \sin\left(\frac{n\pi C(t - \tau)}{S}\right) \int_0^S \delta(\epsilon - v\tau) \sin\left(\frac{n\pi \epsilon}{S}\right) d\epsilon d\tau \end{aligned}$$

여기서 (6)식의 내측 적분은 δ 함수의 sifting property를 사용하여,

$$\int_0^S \delta(\epsilon - v\tau) \sin\left(\frac{n\pi \epsilon}{S}\right) d\epsilon = \sin\left(\frac{n\pi v\tau}{S}\right) \int_0^S \delta(\epsilon - v\tau) d\epsilon = \sin\left(\frac{n\pi v\tau}{S}\right)$$

이므로 이를 (6)식에 대입하고 정리하면 다음과 같이 진동의 모드 n 과 거리 x 및 시간 t 에 관한 다음과 같은 변위식을 얻을 수 있다.

$$y(x, t) = \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{C}\right)^2} \frac{2P_0 S}{\pi^2 T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \sin\left(\frac{n\pi v t}{S}\right) - \frac{v}{C} \sin\left(\frac{n\pi C t}{S}\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{S}\right) \quad (7)$$

3. 집중질량 모델에 의한 해석

Fig. 1과 같이 L 의 간격으로 위치한 전차선의 집중 질량을 $m_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 라 하면 역시 좌

우에도, m_{i-1} , m_{i+1} 의 집중 질량이 있고 이들의 변위를 각각, y_i , y_{i-1} 및 y_{i+1} 이라 하자. 또한 전차선의 장력은 T 로 일정하다. 그러면 집중 질량 m_i 에 관한 운동방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

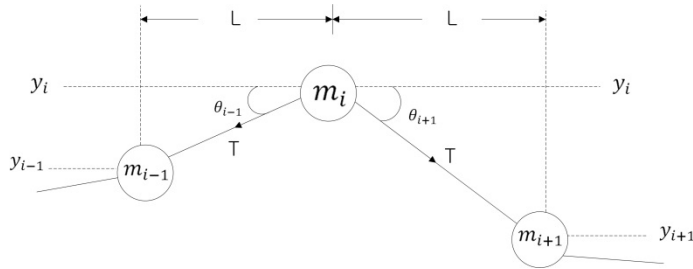


Fig. 1 The lumped mass model diagram

m_i 에 작용하는 장력의 수직 분력과 관성력의 합이 0이 되어야 하므로

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + T(\sin \theta_{i-1} + \sin \theta_{i+1}) = 0 \quad (8)$$

한편,

$$\sin \theta_{i-1} \approx \tan \theta_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{L}, \quad \sin \theta_{i+1} \approx \tan \theta_{i+1} = \frac{y_i - y_{i+1}}{L}$$

로 쓸 수 있고 따라서 (8)식은,

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \frac{T}{L}(-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1}) = 0 \quad (9)$$

(9)식은 분포 질량으로 보고 유도된 (1)식의 파동방정식을 집중 질량의 경우로 변환 시킨 식이다. 전차선의 양단이 고정되어 있는 경우, 위 식은 $i = 2, 3, \dots, n-1$ 집중 질량에 대해 적용하고 첫 번째 집중 질량(m_1)과 마지막 집중 질량(m_n)에 대해서는 다음과 같이 변형시킨 식을 적용 시켜야 할 것이다.

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{T}{L}(3y_1 - y_2) = 0 \quad (i = 1)$$

$$m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} + \frac{T}{L}(-y_{n-1} + 3y_n) = 0 \quad (i = n)$$

한편 팬터그래프의 압상력 $P_0[N](+y$ 축 방향)이 예를 들어 k 번째 집중 질량 m_k 에 작용하

고 있을 때라면 운동방정식은 다음과 같이 된다.

$$m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} + \frac{T}{L} (-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1}) = P_0 \quad (k = 2, 3, \dots, n-1) \quad (10)$$

이제 상태방정식 $\dot{X} = AX + B$ 의 형태[3]로 바꾸기 위해 각각의 집중 질량 m_i 에서 $y_{i,d} = y_i$ (m_i 에서의 y 방향 변위) $y_{i,v} = y'_i$ (m_i 에서 y 방향 속도)로 놓기로 하자. 그러면, 예를 들어

i 번 질량 m_i ($i = 2, 3, \dots, n-1$) 에서,

$$\begin{aligned} y'_{i,d} &= y_{i,v} \\ y'_{i,v} &= \frac{T}{m_i L} y_{i-1,d} - \frac{2T}{m_i L} y_{i,d} + \frac{T}{m_i L} y_{i+1,d} \end{aligned}$$

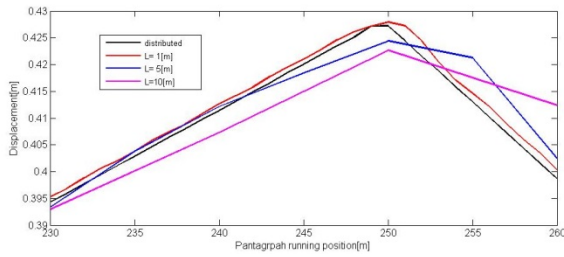
그리고 압상력 P_0 가 작용하는 k 번째 질량 m_k 에서

$$\begin{aligned} y'_{k,d} &= y_{k,v} \\ y'_{k,v} &= \frac{T}{m_k L} y_{k-1,d} - \frac{2T}{m_k L} y_{k,d} + \frac{T}{m_k L} y_{k+1,d} + \frac{P_0}{m_k} \end{aligned}$$

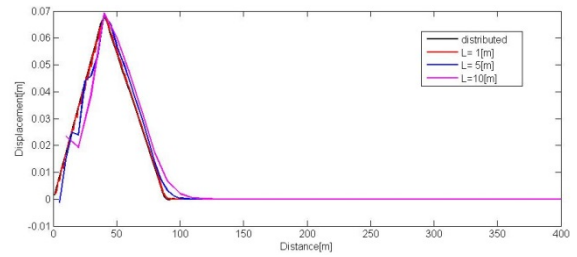
따라서 n 개의 질량점에 대하여 위의 식을 정리하게 되면 $2n$ 개의 상태방정식을 얻을 수 있다.

4. 계산결과 비교

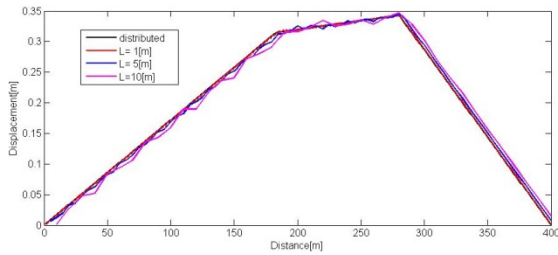
엄밀한 해석이라고 할 수 있는 분포질량 해석의 경우와 집중질량 해석의 경우를 비교하였다. 분포질량의 경우 100차 고조파까지($n = 100$)의 중첩된 해를 구하고 이를 기준으로 집중질량에서 $L = 1[m]$, $L = 5[m]$ 및 $L = 10[m]$ 각각의 경우에 팬터그래프의 위치에 따라 나타나는 변위를 분포질량의 경우와 그래프를 통하여 비교한 결과를 그림 Fig. 2에 나타내었다. 여기서, 인류구간의 길이 $S = 400[m]$ 로, 전차선의 장력 $T = 20[kN]$, 단위 중량 $\rho = 1.334[kg/m]$ 및 팬터그래프의 정압상량 $P_0 = 50[N]$ 으로 가정하였다. 한편, 계산에 소요되는 시간은 $L = 1[m]$ 의 경우를 100[%]로 하였을 때 $L = 2[m]$ 의 경우는 7.9[%], $L = 5[m]$ 의 경우 0.5[%] 및 $L = 10[m]$ 의 경우 0.2[%]로 나타나고 있다. 결과를 살펴보면 예측한 대로 질량점 간의 간격을 축소시켰을 때 분포질량의 경우에 근접해 감을 알 수 있으나 계산 소요 시간은 질량점 간격을 증가시킴에 따라 극적으로 감소하고 있으므로 이상에서 본 바와 같은 간단한 시뮬레이션을 통하여 문제 해결에 필요한 오차 범위 내에서 최소한의 계산 시간이 소요되는 질량점 간격을 도출할 수 있을 것으로 판단된다.



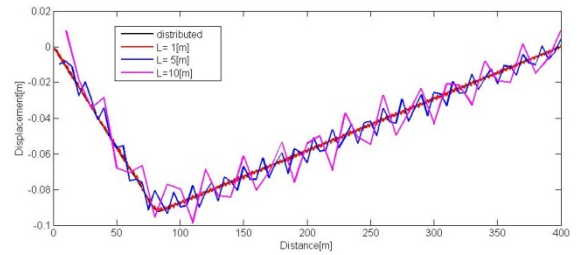
(a) At pantograph's running position



(b) Pantograph's position is at 40[m]



(c) Pantograph's position is at 280[m]



(d) Pantograph's position is at 400[m]

Fig. 2 Displacements of trolley wire

5. 결론

본 연구에서는 전차선의 분포질량 모델과 질량점 간격을 변화시킨 집중질량 모델에서의 계산 결과 비교를 통하여 계산 시간과 정확성에서 수월성을 유지할 수 있는 질량점 간격을 도출해 내고자 하였다. 계산시간은 질량점 간격이 증가할수록 급격히 감소하나 분포질량 모델과의 오차는 완만히 증가하여 단순 현으로 간략화된 전차선에서 간단한 시뮬레이션을 통하여 문제 해결에 필요한 오차 범위 내의 최대 질량점 간격을 도출할 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

- [1] Mochinaga, et al. (2007) *Electric Railway Handbook*, Corona publishing co. ltd., Tokyo, pp. 468-473.
- [2] A. D. Polyanin (2002) *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*, A CRC press company, NY, pp. 32-35.
- [3] R. A. Decarlo (1989) *Linear Systems : A State variable approach with numerical implementation*, Prentic-Hall, NY, pp. 23-33.