

# 시공간 네트워크를 활용한 열생성 기반 열차 스케줄 작성 방법론

## A column-generation based approach to developing an optimized railway timetable using time-space networks

박범환<sup>†</sup> 홍순흠<sup>\*</sup>

Bum Hwan Park<sup>†</sup> Soon-Heum Hong<sup>\*</sup>

**Abstract** Recently there have been some needs to develop an optimized timetable, for example to assign train-paths to multiple operation companies, to find out the routes and times of temporary trains like tour trains, or to evaluate the effectiveness of skip-stop pattern in urban railway. However, the timetabling problem is well known as it cannot be easily solved in the down scaled instances due to a lot of variables and operational constraints like the minimum headway, minimum running time, station capacity and so on. We present a new approach based on column generation technique and time-space network, where Fix-and-Regenerate scheme is considered in order to obtain various promising train-paths in a reasonable time which are expected to improve the objective value of the final master problem.

**Keywords :** timetable, optimization, column generation

**초 록** 최근 경쟁 체제 도입에 따른 복수의 운영자간 열차경로의 할당, 수요에 대응한 임시 열차의 투입, 도시 철도에서의 skip-stop 운영에 따른 효과분석 등, 다양한 분야에서 보다 체계적인 열차 스케줄 작성 방법론에 대한 필요성이 대두되고 있다. 그러나 열차 스케줄 작성 문제는 주행 시분, 열차간 시격, 역 대피 용량 등 고려해야 할 요소가 방대하여, 규모를 축소한 소규모의 네트워크에서도 최적해를 찾기 매우 어려운 문제로 알려져 있다. 본 연구는 위에서 서술한 문제들에 대해 공통적으로 적용 가능한 시공간 네트워크를 활용한 스케줄 작성 방법론을 제시하고자 한다. 이 방법론은 열생성 기반 해법으로서, 열차-경로를 변수화하여, 목적함수에 기여할 수 있는 제한된 경로만을 생성하고, Fix-and-Regenerate 방식에 의해 제한된 시간 안에 보다 다양한 경로를 생성하여 좋은 품질의 스케줄을 빠른 시간 안에 찾을 수 있다.

**주요어 :** 열차 스케줄, 최적화, 열생성

## 1. 서 론

최근 효율적인 열차 스케줄 작성 방법론에 대한 관심이 증가하고 있다. 기존의 스케줄 작성은 최적화 혹은 시뮬레이션 기반이라기 보다는 전문가의 경험에 크게 의존해왔고, 특히 도시철도의 경우, 평행 다이어 형태로 작성되므로 상대적으로 쉽게 작성할 수 있었다. 그러나, 최근 경쟁 체제 도입 시 운영자간 열차 경로의 할당([1,2])이나 도시철도에서의 skip-

<sup>†</sup> 한국교통대학교 철도경영물류학과(beomi72@hanmail.net)

<sup>\*</sup> 한국철도기술연구원 녹색교통물류시스템공학연구소

stop 패턴을 활용한 평균 주행 시분의 감소 효과 분석([3]), 수요에 대응한 임시 열차의 투입([4])등을 위해서는 효율적인 열차 스케줄 작성을 요구한다. 특히 복수의 운영자간 열차 경로 할당의 경우, 어떠한 절차를 통해 복수의 운영자에게 열차 경로를 할당하더라도, 효과적인 스케줄 작성 방법론이 없는 상태에서는 열차-경로 할당을 원활히 수행할 수 없으며, 임시 열차의 투입 기존 열차 스케줄의 조정 없이는 임시 열차의 경로를 찾는 것이 쉽지 않다는 점에서, 관련 목적함수를 최적화하는 효과적인 스케줄 작성 방법론이 필요하다.

본 연구는 위에서 서술한 문제들에 대해 공통적으로 적용 가능한 시공간 네트워크를 활용한 스케줄 작성 방법론을 제시하고자 한다. 이 방법론은 열차경로를 변수화하여 목적함수를 개선시킬 수 있는 제한된 경로만을 동적으로 생성하는 열생성 기반 해법이며, 보다 다양한 열차-경로를 빠른 시간 안에 찾기 위해, Fix-and-Regenerate 방식을 적용하였다. 2장에서는 다양한 스케줄 작성 문제들에 공통적으로 적용하기 위해 필요한 시공간 네트워크의 작성 방법을 제시한 후 열차경로 기반 최적화 모형 및 해법을 제시할 것이다. 3장에서는 몇 가지 시나리오를 고려한 실험결과를 통해 해법의 효과를 검증하였다.

## 2. 시공간 네트워크와 최적화 모형

### 2.1 시공간 네트워크의 구성

시공간 네트워크는 [4,5,6]등 스케줄 작성과 관련한 대부분의 연구에서 자주 활용되는 네트워크이다. 본 연구에서 제시하는 시공간 네트워크 또한 기존의 네트워크와 본질적으로 동일하지만, 앞에서 서술한 다양한 문제를 표현하기 위해서는 보다 세밀한 네트워크 구성이 필요하다. 특히 주어진 허용치 안에서 열차의 출발시간 및 정차 시간의 변경이나, 정차할 경우와 통과할 경우의 역간 주행 시분의 차이를 표현하기 위한 time-reverse arc의 도입, 다음 장에서 살펴볼 열차-경로 기반 최적화 모형 및 열생성 해법은 본 연구에서 새롭게 제시하는 방법론이다.

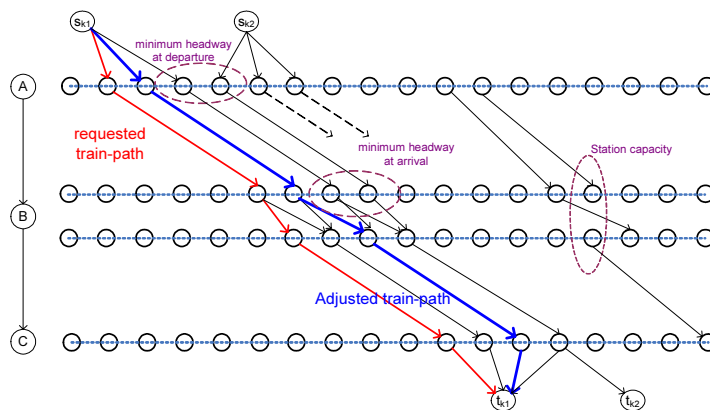


Fig. 1 Time-Space Network

먼저 시공간 네트워크는 역에서의 출도착을 표현하기 위한 노드(node)와 열차의 움직임, 즉 주행 및 정차를 의미하는 아크(arc)로 구성된다. 시공간 네트워크에서는 열차를 두 개의 가상 노드를 연결하는 하나의 경로로 표현하는데, Fig. 1에서 처럼  $k1$  열차는 붉은색 아크

로 표현된다. 그런데 다른 열차와의 경합을 회피하기 위해  $k1$  열차의 출발시간을 일정 범위 안에서 조정하거나, 중간 정차역에서의 정차 시간을 조정할 수 있다면, 이러한 시간 조정을 표현하기 위한 별도의 아크가 필요한데, Fig. 1에서 붉은색 아크를 제외한 아크들은 이를 표현하기 위한 아크이다. 특히 시발역에서의 출발 시간 조정을 위해, 열차는 가상의 노드  $s_{k1}$ 에서 출발하여 가상노드  $t_{k1}$ 에 도착하는 경로로 표현된다. 모든 열차에 대해 이러한 아크들이 개별적으로 생성되며, 설정되는 문제에 따라 경합이 없는 최종 조정 스케줄을 찾게 된다. Fig. 1의 푸른색 아크는 조정된 열차-경로를 표현한 것이다.

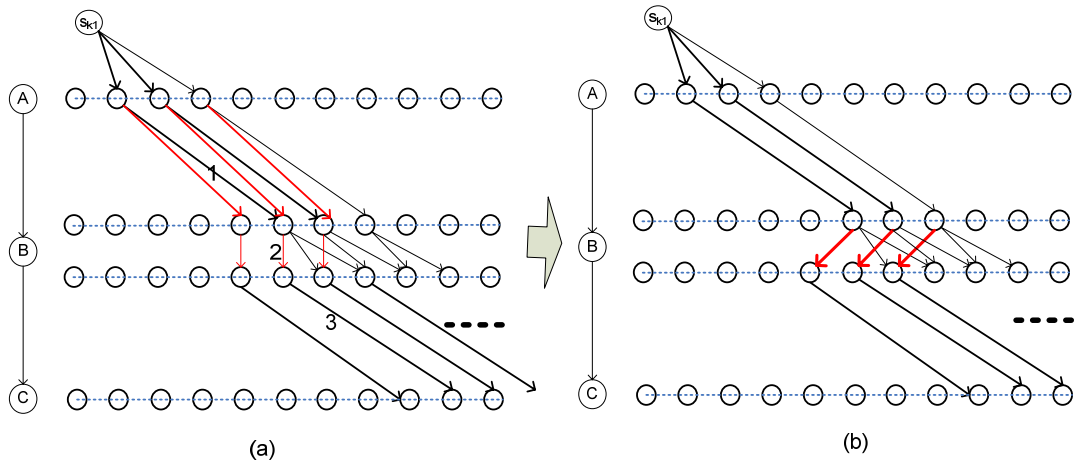


Fig. 2 Time-reverse arcs representing skip-stop pattern

그런데 임시 열차의 투입 시, 화물열차의 대피 등을 고려하기 위해서는, 열차가 특정역에서 정차와 무정차를 선택적으로 수행할 수 있도록 시공간 네트워크를 구성해야 된다. 이 때 가장 큰 문제는 정차할 때와 무정차할 때의 주행 시분에 차이가 발생한다는 점이다. 주행시분의 차이를 고려하여 정차/무정차를 표현하기 위한 가장 쉬운 방법이 Fig.2에 표현되어 있다. 즉, 주행을 의미하는 주행아크를 운전 시분에 따라 여러 개로 표현하고, 무정차인 경우 정차 시간이 없는 수직방향의 정차 아크를 추가한다. 그런데 이 방법은 매우 많은 주행 아크를 필요로 한다는 점 뿐만 아니라, 그림에서 1-2-3으로 표현된 것처럼 정차시 주행아크가 무정차를 의미하는 정차 아크로 연결되어 비가능 경로가 생성되는 문제를 야기한다. 본 연구에서는 주행아크 수를 최대한 줄이고, 비가능 경로 생성을 방지하기 위해, 시간역방향 아크(time reverse arc)를 도입한다. 즉, 모든 주행 아크는 정차를 가정했을 때의 주행시분을 고려하여 주행 아크를 작성하고, 모형 자체에서 정차를 할 것인지 말 것인지는 시간역방향 아크의 사용유무로 결정할 수 있다.

스케줄 작성시 고려되어야 하는 운영상 제약조건들은 시공간 네트워크에서 크게 세 가지로 구분할 수 있는데, 출도착시 열차간 간격, 추월 방지 그리고 역 용량 제약이다. 위 세가지 경합 방지 조건은 시공간 네트워크에서, 특정 아크들의 사용량에 대한 제약식 형태로 간단히 표현되는 장점이 있다.

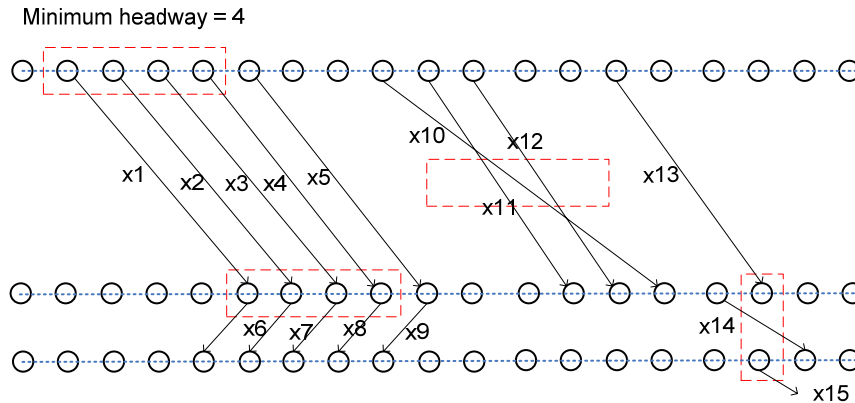


Fig. 3 Representing operational constraints preventing conflicts

먼저, Fig. 3에서 출도착역에서 열차간 최소 시격이 4분이라 가정하고, 시공간 네트워크의 노드 간 간격이 1분을 의미한다면, 연속 노드 네 개로부터 출발 혹은 도착하는 아크들은 열차 경로 설정 시 하나의 아크만 선택되어야 한다. 그런데 도착역에서의 최소 시격 조건을 고려할 때, 주의해야 할 점은 시간역방향 아크의 포함여부이다. 예를 들어 도착역에서의 연속 노드 네 개에 도착하는 아크는  $x_1, x_2, x_3, x_4$  지만,  $x_9$ 는  $x_5$ 에 대응되는 열차가 무정차했을 때 도착시간을 의미하므로  $x_9$ 도 함께 고려하여야 한다. 즉, 아래 그림에서 주어진 시간간격 구간(붉은색 점선 사각형)의 경우,

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1$ ,  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \leq 1$  와 같이 제약식을 설정하면 된다.

서로 다른 열차종이 혼합된 열차 스케줄의 경우, 속도에 따른 추월을 방지하기 위해서는  $x_{10} + x_{11} + x_{12} \leq 1$  과 같은 제약식을 포함시킨다. 마지막으로 역용량 제약은, 한 역에서 대피선을 고려했을 때, 특정 시점에 한 역에서 수용 가능한 열차수를 의미하는 데, 만약 역용량이 2인 경우,  $x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 2$  와 같이 제약식을 설정한다.

## 2.2 경로 기반 최적화 모형 및 열생성 해법

위에서 제시한 시공간 네트워크 및 경합 방지 제약식 설정 방법을 이용하면, [2,4,5]에서 제시된 형태의 다품종 흐름 모형 형태의 최적화 모형을 구성할 수 있다. 그러나 아크의 개수가 매우 많고 경합 방지 제약식으로 인해, 빠른 시간 안에 해를 구하기는 쉽지 않다. 본 연구는 [1]에서와 마찬가지로 경로 흐름량(path flow) 기반 최적화 모형을 구성하고자 한다. 이 모형은 [1]에서 제시한 모형과 본질적으로 동일하며, 이후 제시할 열생성 해법은 [1]에서 제시한 해법을 보다 개량하여 Fix-and-Regenerate 전략을 추가한 것이다. 수리모형 구성을 위해 [1]에서 사용한 용어를 재서술하면 아래와 같다.

### 용어

- $G=(V,A)$  : 시공간 그래프. 아크는  $a$ 로 표현
- $K$  : 주어진 열차의 집합. 원소는  $k$ 로 표현

- $\Psi_k$  : 주어진 열차  $k$ 에 대한 경로 집합. 원소는  $P$ 로 표현
- $c^k(P)$  : 주어진 열차  $k$ 의 경로  $P$ 의 이익.  $c^k(P) = \sum_{a \in P} c_a^k$
- $C$  : 경합-방지 아크의 집합. 원소는  $(k, a)$ 로 표현. 이 때, 아크  $a$ 는 열차  $k$ 에 대응되는 아크
- $\Omega$  : 경합-방지 아크 집합의 모임(collection), 원소는  $C$
- $l_C$  : 경합-방지 아크의 집합  $C$  중 사용 가능한 아크의 수. 출도착 최소시격, 추월방지의 경우 1, 역용량 제약의 경우 해당 역에서 동시에 수용 가능한 열차 수
- $f_k(P)$  : 열차  $k$ 가 경로  $P$ 를 사용하면 1, 그렇지 않으면 0

### 최적화 모형

$$\text{Max} \sum_{k \in K} \sum_{P \in \Psi_k} c^k(P) f_k(P) \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \sum_{P \in \Psi_k} f_k(P) \leq 1, \forall k \in K \quad (2)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{P \in \Psi_k | P \cap C \neq \emptyset} f_k(P) \leq l_C, \forall C \in \Omega \quad (3)$$

$$f_k(P) \in \{0, 1\}$$

위 모형은 모든 경로를 변수화한 모형으로서 경로 개수는 지수적으로 많으므로, 모든 경로를 미리 생성하여 위 문제를 푸는 것은 불가능하다. 따라서 위 최적화 모형을 풀기 위해서는 목적함수에 기여할 수 있는 소수의 경로만을 생성하여 경로를 추가하게 된다. 이를 위해서는 우선 위 문제의 정수 제약조건을 완화하여 선형계획 문제(완화된 주문제 : relaxed master problem)를 구성하고, 선형 계획의 최적 조건을 이용하여 새로운 경로를 추가적으로 생성한다. 이를 위해 우선 식 (2)와 식 (3)에 대응되는 쌍대 변수를  $\pi_k, \mu_C$ 라 하면 완화된

주문제의 최적 조건은 아래와 같다. 모든  $k \in K$ 에 대하여,

$$\sum_{a \in P} c_a^k - \sum_{a \in P} \sum_{C | (k, a) \in C} \mu_C - \pi_k \leq 0$$

$$\text{위 식을 다시 정리하면 } \sum_{a \in P} c_a^k(P) - \sum_{a \in P} \sum_{C | (k, a) \in C} \mu_C - \pi_k = \sum_{a \in P} [c_a^k - \sum_{C | (k, a) \in C} \mu_C] - \pi_k \leq 0 \text{가 되어 결국,}$$

시공간 네트워크에 있는 아크의 비용을  $c_a^k - \sum_{C | (k, a) \in C} \mu_C$ 이라 했을 때, 전체 경로의 비용이  $\pi_k$

보다 큰 경로가 목적함수를 개선시킬 수 있다. 이는 최장경로를 구함으로써 가능한데, 일반적인 최장 경로 문제는 NP-hard문제이지만, 본 연구에서 제시한 시공간 네트워크는 비환

(acyclic) 네트워크이므로 최단경로 알고리즘을 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

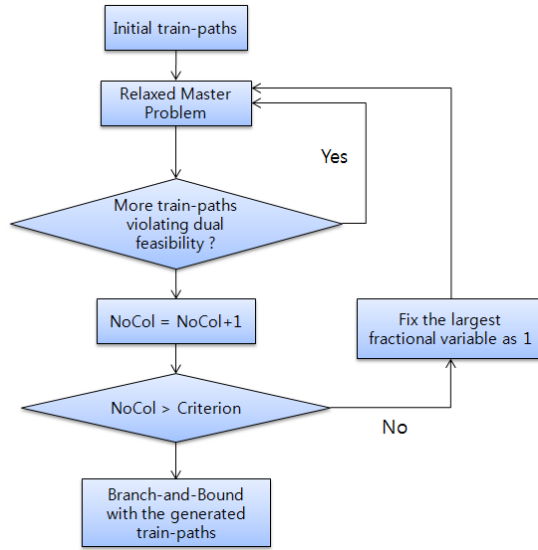


Fig. 4 Algorithm

[1]에서 제시한 알고리즘은 이렇게 생성된 경로를 더 이상 발견되지 않을 때까지 생성하여, 그 경로들로 이루어진 주문제를 분지한계법을 이용하여 최종해를 도출하였다. 그러나 이 해법의 경우, 완화된 주문제를 개선시킬 수 있는 경로는 매우 제한되어, 실제 정수 조건이 포함된 주문제를 개선시킬 수 있는 경로가 충분히 만들어지기 전에, 열생성 단계가 종료될 수 있는 단점이 있다. 이를 개선하기 위해, 본 연구에서는 더 이상 완화된 주문제를 개선시킬 수 있는 경로가 발견되지 않을 때에는, 비정수값을 갖는 변수를 1로 설정하여 완화된 주문제의 쌍대 변수에 인위적인 변화를 주어, 보다 다양한 경로를 생성하는 Fix-and-Regenerate 방식을 활용하였다. Fig. 4는 전체 알고리즘의 흐름을 보여주고 있다. 여기서 NoCol은 Fix-and-Regenerate의 반복 횟수를 의미하는데, 반복 횟수가 주어진 조건을 넘어서면, 지금까지 만들어진 경로를 모두 포함한 주문제를 분지한계법을 적용하여 최종해를 도출하게 된다.

### 3. 실험 결과

위에서 제시한 시공간 네트워크 구성 및 최적화 모형의 효과를 분석하기 위해 본 연구는 활용 가능성을 고려하여 두 가지 예제에 대한 실험을 수행하였다. 첫 번째 예제는 모든 열차가 제한된 범위 내에서 열차의 출도착시간 및 정차 시간을 조정할 수 있는 경우인데, 이는 다수 열차 운영 사업자로부터 제출된 열차 경로들을 효과적으로 조정하는 것을 고려한 것이다. 두 번째 예제는 임시 열차를 투입하기 위한 것으로, 시간역방향아크를 통한 화물 열차의 선택적인 대피여부를 고려하기 위한 시나리오다.

먼저, Fig. 2는 두 가지 예제에 사용된 네트워크들로서, (a)는 수서발 고속열차까지 포함하여 고속열차가 운행하는 구간을 단순화시킨 네트워크이며, (b)는 임시열차 스케줄 작성을 위한 예제이다. (b)는 실제로 46개 역으로 구성된 네트워크인데 분기역을 중심으로 한 주요

역만 그림에 포함시켰다.

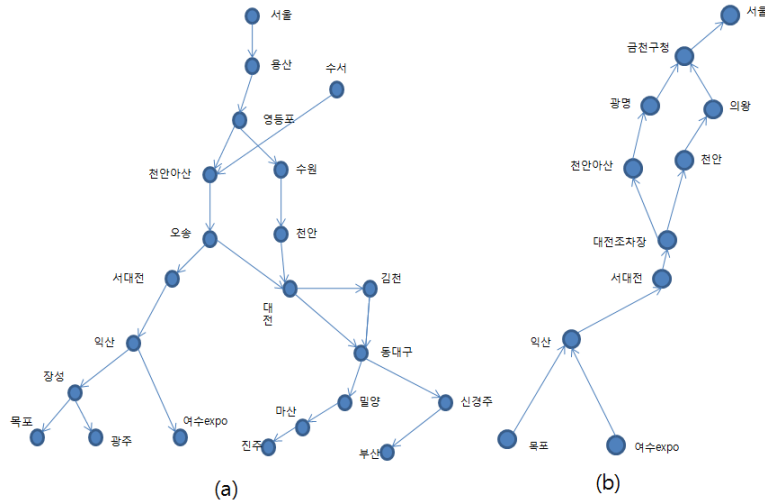


Fig. 5 Example Network

예제 1에서는 현재 KTX 운행노선에 투입되고 있는 KTX와 새마을 하행 열차와 이 열차들의 스케줄을 활용하여 가상의 수서발 KTX 열차를 합하여 총 203개의 열차를 생성하였고, 예제 2에서는 특정 시간대에 운행하고자 하는 임시열차 1대와 그 주변의 경합 발생 가능성이 있는 5개의 열차로 구성된다. 예제 2에서는 기존 운행예정인 고속열차의 스케줄은 변경 불가능하고, 새마을 혹은 무궁화 열차는 도중 정차 역에서만 일정 범위(5분)안에서 정차 시간을 증가시킬 수 있다고 가정하였고, 화물열차의 경우 도중 통과역에서도 정차를 할 수 있으며, 출발 시간, 정차 시간 또한 30분 범위에서 조정할 수 있다고 가정하였다.

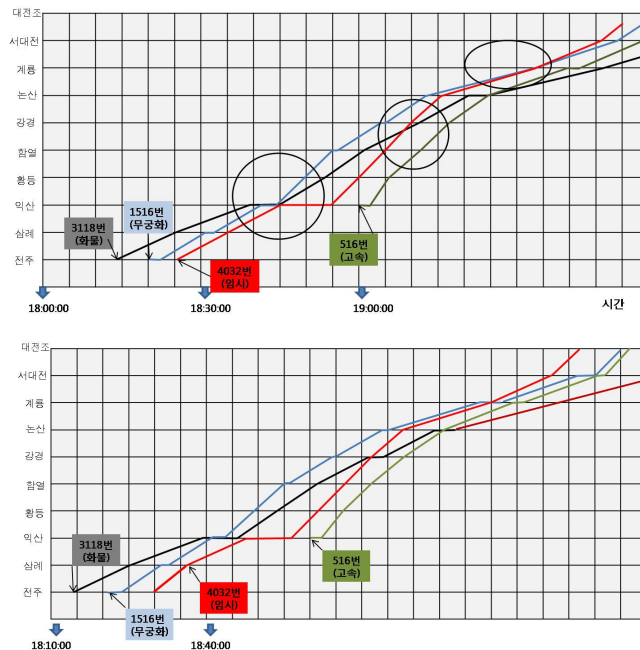


Fig. 6 Result of Example 2

실험 결과 예제 1에서는 67초 정도의 계산 시간 안에 203개의 열차를 경합 없이 열차 경로를 배정할 수 있었고, 예제 2에서는 3개의 열차의 스케줄 조정을 통해 임시 열차를 추가할 수 있었으며, 이 때 전체 열차의 지연시간은 8분이었다. Fig. 6은 예제 2의 결과를 열차 다이어그램 형태로 표현한 것이다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 스케줄 초안이 주어져 있을 때, 특정 목적함수를 최적화 하는 조정 스케줄을 작성하기 위한 최적화 모형 및 해법을 제시하였다. 특히 본 연구에서 제시한 모형은 역에서의 정차/무정차에 따른 주행시분의 차이를 반영하였고, 출발시간, 정차 시간을 특정 범위 내에서 조정할 수 있다는 장점이 있었고, 열생성 기반 해법으로 충분히 큰 네트워크에 대해서 빠른 시간 안에 좋은 품질의 해를 얻을 수 있었다.

그러나 열차간 최소시격은 서로 다른 열차종이 어떤 순서로 출발하느냐에 따라 열차간 최소시격은 달라진다. 본 연구에서는 이를 동일한 것으로 가정하였지만, 보다 정확한 경합 조건을 반영하기 위해서는 이를 고려한 모형이 필요하다. 뿐만 아니라 현재까지 고속열차 네트워크에 한해서는 충분히 만족할 만한 수준의 해 품질과 계산시간을 얻었지만, 전체 철도 네트워크에 적용하기 위해서는 알고리즘 성능을 보다 높일 필요가 있다.

#### 후 기

이 논문은 한국철도기술연구원으로부터 지원을 받아 수행한 연구임을 밝힙니다.

#### 참고문헌

- [1] B. H. Park, S.-H. Hong, and C.-S. Kim (2012) *An Optimization Model for Railway Slot Allocation Reflecting the Operational Policies*, Journal of the Korean Society for Railway, Vol. 15, No. 5, pp.524-530.
- [2] R. Borndörfer, M. Grotchel, S. Lukac, K. Mitusch, T. Schlechte, S. Schultz and A. Tanner (2005) *An Auctioning Approach to Railway Slot Allocation*, ZIB-Report 05-45
- [3] S.-I. Han and D.-K. Lee(2010), *Study of Improving the Operation Diagram of Seoul Metro Line 9 by Diversifying Train Patterns*, Journal of the Korean Society for Railway, Vol. 13, No.15, pp.125-130.
- [4] V. Cacchiani, A. Caprara and P. Toth(2010), *Scheduling Extra Freight Trains on Railway Networks*, Transportation Research Part B, Vol. 44, pp.215-231
- [5] A. Caprara, M. Fischetti and P. Toth (2001) *Modeling and Solving the Train Timetabling Problem*, Operations Research, 50(5), pp. 851-861
- [6] U. Brännlund, P.O. Lindberg, A. Nöu and J.-E. Nilsson (1998) *Railway Timetabling Using Lagrangian Relaxation*, Transportation Science, 32(4) , pp. 358-369